

2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模数学试卷

一、选择题

(本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 已知集合
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- ,
- $B = \{y | y = 3x - 2, x \in A\}$
- , 则
- $A \cap B = (\quad)$
- .

A. $\{1\}$ B. $\{4\}$ C. $\{1, 3\}$ D. $\{1, 4\}$

2. 已知
- $x = \ln \pi$
- ,
- $y = \log_5 2$
- ,
- $z = e^{-\frac{1}{2}}$
- , 则
- $(\quad)$
- .

A. $x < y < z$ B. $z < x < y$ C. $z < y < x$ D. $y < z < x$

3. 已知双曲线
- $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$
- 的右焦点与抛物线
- $y^2 = 2px (p > 0)$
- 的焦点重合, 则该抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为
- $(\quad)$
- .

A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{5}{2}$ D. 5

4. 在
- $\triangle ABC$
- 中,
- $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$
- ,
- $AB = \sqrt{2}$
- ,
- $BC = 3$
- , 则
- $\sin \angle BAC = (\quad)$
- .

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

5. 设
- a, b
- 是两条直线,
- α, β
- 是两个平面, 则 “
- $a \perp b$
- ” 的一个充分条件是
- $(\quad)$
- .

A. $a \perp \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$ B. $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$
C. $a \subset \alpha, b \perp \beta, \alpha // \beta$ D. $a \subset \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$

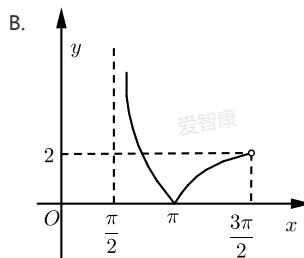
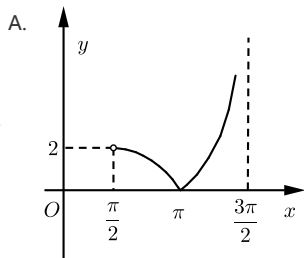
6. 由
- $0, 1, 2, 3, 4, 5$
- 所组成的没有重复数字的四位数中, 能被5整除的有
- $(\quad)$
- .

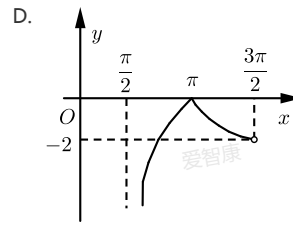
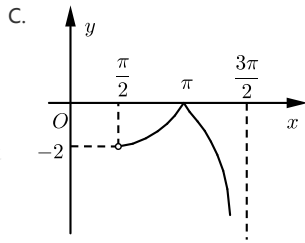
A. 512个 B. 192个 C. 240个 D. 108个

7. 已知函数
- $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
- , 其中
- $x \in \mathbf{R}$
- , 则下列结论中正确的是
- $(\quad)$
- .

A. $f(x)$ 是最小正周期为 x 的偶函数
B. $f(x)$ 的条对称轴是 $x = \frac{\pi}{3}$
C. $f(x)$ 的最大值为2
D. 将函数 $y = \sqrt{3} \sin 2x$ 的图象左移 $\frac{\pi}{6}$ 得到函数 $f(x)$ 的图象

8. 函数
- $y = \tan x + \sin x - |\tan x - \sin x|$
- 在区间
- $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$
- 内的图象大致是
- $(\quad)$
- .





9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = |f(x)| - x + m$ 恰有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{4}, 0]$ B. $[0, \frac{1}{4}) \cup (2, +\infty)$
- C. $(-2, -\frac{1}{4}] \cup [0, +\infty)$ D. $(\frac{1}{4}, 2) \cup [0, +\infty)$

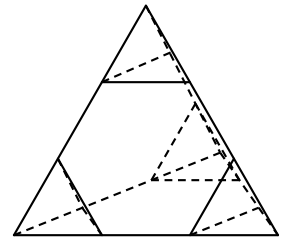
二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. i 是虚数单位, 若复数 $(1 - 2i)(a + i)$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 _____.

11. $(x^2 - \frac{1}{x})^8$ 的展开式中 x 项的系数为 _____ . (用数字作答)

12. 半正多面体亦称“阿基米德多面体”, 是由边数不全相同的正多边形为面组成的多面体. 如将正四面体所有棱各三等分, 沿三等分点从原几何体割去四个小正四面体如图所示, 余下的多面体就成为一个半正多面体, 若这个半正多面体的棱长为2, 则这个半正多面体的体积为 _____.



13. 已知圆 C 的圆心在直线 $x - 2y - 3 = 0$ 上, 且过点 $A(2, -3)$, $B(-2, -5)$, 则圆 C 的标准方程为 _____.

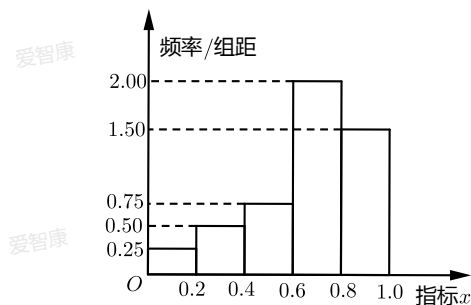
14. 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$, $CD = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$, 若 M 为线段 AD 上的一点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的最大值为 _____.

15. 若 $b > a > 1$, 且 $3 \log_a b + 6 \log_b a = 11$, 则 $a^3 + \frac{2}{b-1}$ 的最小值为 _____.

三、解答题

(本大题共5小题, 共75分)

16. 在贯彻中共中央、国务院关于精准扶贫政策的过程中, 某单位在某市定点帮扶某村100户贫困户. 为了做到精准帮扶, 工作组对这100户村民的年收入情况、危旧房情况、患病情况等进行调查, 并把调查结果转化为各户的贫困指标将指标 x . 按照 $[0, 0.2)$, $[0.2, 0.4)$, $[0.4, 0.6)$, $[0.6, 0.8)$, $[0.8, 1.0]$ 分成五组, 得到如图所示的频率分布直方图. 规定若 $0 \leq x < 0.6$, 则认定该户为“绝对贫困户”, 否则认定该户为“相对贫困户”; 当 $0 \leq x < 0.4$ 时, 认定该户为“亟待帮助户”.

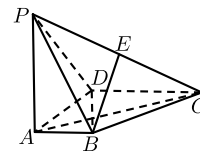


- (1) 为了更好的了解和帮助该村的这些贫困户，决定用分层抽样的方法从这100户中随机抽取20户进行更深入的调查，求应该抽取“绝对贫困户”的户数。
- (2) 从这20户中任取3户，求“绝对贫困户”多于“相对贫困户”的概率。
- (3) 现在从(1)中所抽取的“绝对贫困户”中任取3户，用 X 表示所选3户中“亟待帮助户”的户数，求 X 的分布列和数学期望 EX 。

17. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， S_n 为其前 n 项和，且 $a_5 = 3a_2$ ， $S_7 = 14a_2 + 7$ ，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n ，且满足 $3b_n = 2T_n + 3$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

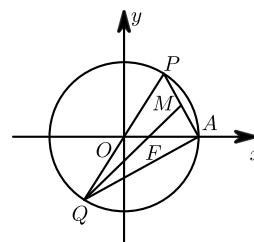
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 R_n ，求 R_n 。

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \perp AB$ ， $AB \parallel DC$ ， $AD = DC = AP = 2$ ， $AB = 1$ ，点 E 为棱 PC 的中点。



- (1) 证明 $BE \perp DC$ 。
- (2) 求直线 BE 与平面 PBD 所成角的正弦值。
- (3) 若 F 为棱 PC 上一点，满足 $BF \perp AC$ ，求二面角 $F-AB-P$ 的余弦值。

19. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点、右顶点分别为 F, A ，过原点的直线与椭圆 C 交于点 P, Q （点 P 在第一象限内），连接 AP, FQ ，若 $AF = 2$ ， $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 的面积3倍。



- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 已知 M 为线段 PA 的中点，连结 QA, QM 。
- ① 求证： Q, F, M 三点共线。
- ② 记直线 QP, QM, QA 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 ，若 $k_1 + k_3 = \frac{5}{2}k_2$ ，求 $\triangle PQM$ 的面积。

20. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ， $g(x) = x^2 - 2x$ 。

- (1) 求 $f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线方程。
- (2) 若关于 x 的不等式 $f^2(x) + tf(x) > 0$ 有且仅有三个整数解，求实数 t 的取值范围。
- (3) 若 $h(x) = g(x) + 4xf(x)$ 存在两个正实数 x_1, x_2 满足 $h(x_1) + h(x_2) - x_1^2 x_2^2 = 0$ ，求证： $x_1 + x_2 \geq 3$ 。

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康

爱智康